Familles sommables de nombres complexes

Contents

1 Ensembles dénombrables

1.1 Définition

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

1.1.1 Exemples

$\mathbb{N}^*$, l'ensemble des entiers pairs.

1.1.2 Théorème

$\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration

Une bijection f de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$:

$$f(2n) = n,\ f(2n-1) = -n$$

1.2 Les parties infinies de $\mathbb{N}$

1.2.1 Théorème

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.

1.2.2 Théorème

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Démonstration

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$; soit $a_0 = \min A$; on pose

$$f(0) = a_0$$

Ensuite ?
$A_1 = A \setminus \{a_0\}$, $a_1 = \min A_1$, $A_2 = A_1 \setminus \{a_1\}$...

1.2.3 Corollaire

Un ensemble est fini ou dénombrable
si et seulement si
il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

1.3 Produit fini

Théorème

$\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

Démonstration

On exhibe une bijection f de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$: $f(p,q) = 2^p(2q+1)$.

Corollaire

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

1.4 Avec injection ou surjection

1.4.1 Avec une surjection

On suppose qu'il existe une application surjective f de $\mathbb{N}$ sur E.
Alors E est fini ou dénombrable.

Démonstration

Il suffit de trouver une partie de $\mathbb{N}$ en bijection avec E.
Par exemple, pour chaque élément x de E, le plus petit des antécédents de x.

1.4.2 Avec une injection

On suppose qu'il existe une application injective f de E dans $\mathbb{N}$.
Alors E est fini ou dénombrable.

Démonstration

f induit une bijection de E sur ?
Sur $f(E)$.

1.5 Les rationnels

Théorème

$\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration

On exhibe une surjection f de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$:

$$f(p,q) = \frac{p}{q}$$

1.6 Union

Théorème

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables
est finie ou dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles finis ou dénombrables,
et E leur réunion.
On peut noter

$$E_n = \{u_{n,p}/p \in \mathbb{N}\}$$

Il existe alors une surjection évidente de $\mathbb{N}^2$ sur E :

$$(n,p) \to u_{n,p}$$

1.7 Un ensemble non dénombrable : $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Exercice

Soit $E = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites d'entiers.
Examinons une suite d'éléments de E :

$$\begin{array}{l} U_0(0), U_0(1), U_0(2), U_0(3), U_0(4), \ldots \\ U_1(0), U_1(1), U_1(2), U_1(3), U_1(4), \ldots \\ U_2(0), U_2(1), U_2(2), U_2(3), U_2(4), \ldots \end{array}$$

On introduit la suite $U(k) = U_k(k) + 1$ (procédé diagonal).
Cette suite U diffère de tous les U_n.

1.8 Les réels

Théorème

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration

On utilise à nouveau le procédé diagonal,
appliqué à l'écriture décimale des réels de $[0,1[$.

Autre démonstration

Soit (u_n) une suite de réels et

$$X = \{u_n /\, n \in \mathbb{N}\}$$

On choisit deux réels a_0 et b_0 tels que $0 < b_0 - a_0 \leq 1$ et

$$u_0 \notin [a_0, b_0] = I_0$$

Ensuite, on construit par récurrrence deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \geq 0,\, 0 < b_n - a_n \leq \frac{1}{n+1}$$

et

$$\forall n \geq 1,\, u_n \notin [a_n, b_n] = I_n \subset I_{n-1}$$

On vérifie que (a_n) et (b_n) sont adjacentes,
et que leur limite commune n'est aucun des u_n. Donc

$$X \neq \mathbb{R}$$

1.9 Les parties de $\mathbb{N}$

Exercice

Montrer que l'ensemble $P_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
Que dire de $P(\mathbb{N})$?

Réponse

Soit X un ensemble quelconque et φ une application de X dans $P(X)$.
Soit

$$Y = \{x \in X /\, x \notin \varphi(x)\}$$

Montrer que Y n'a pas d'antécédent par φ.
En déduire que $P(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

1.10 Les algébriques

Exercice

$\mathbb{A}$ est dénombrable, ce qui prouve qu'il existe beaucoup de réels transcendants...

2 Familles sommables de réels positifs

2.1 Définition

Soit I un ensemble dénombrable, et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable
si l'ensemble des sommes finies

$$\sum_{i\in F} u_i$$

où F décrit l'ensemble des parties finies de I,
est majoré.
Dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent.
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$.
Dans tous les cas, la somme est notée

$$\sum_{i\in I} u_i$$

Remarque

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable ; soit $J \subset I$; alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

Remarque

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable, $(v_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs tels que :

$$\forall i \in I,\, 0 \leq v_i \leq u_i$$

Alors (v_i) est sommable.

2.2 Cas où $I = \mathbb{N}$

Théorème

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente.
Dans ce cas, la somme est la même.

2.3 Théorème de sommation par paquets

Démonstration hors programme

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si :
1) Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ; notons $s_n = \sum_{i\in I_n} u_i$.
2) La série $\sum s_n$ converge.
Dans ce cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$$

2.4 Exemple 1

$I = \mathbb{N}^2$; $\alpha > 0$; $u_{0,0} = 0$,

$$u_{p,q} = \frac{1}{(p+q)^{\alpha}}$$

sinon.
$(u_{p,q})$ est-elle sommable ?

Réponse

Soit

$$I_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / \, p+q = n\right\}$$

Pour tout $n \geq 1$:

$$s_n = \sum_{(p,q)\in I_n} u_{p,q} = \frac{n+1}{n^{\alpha}}$$

Conclusion :
$(u_{p,q})$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

2.5 Exemple 2

$I = \mathbb{N}^2$; $u_{0,0} = 0$,

$$u_{p,q} = \frac{1}{p^2+q^2}$$

sinon.
$(u_{p,q})$ est-elle sommable ?

Réponse 1

Elle n'est pas sommable ; remarquons que

$$u_{p,q} = \frac{1}{p^2+q^2} \geq \frac{1}{(p+q)^2}$$

On est ramené à l'exemple 1.

Réponse 2

Ici

$$I_n = \{(p,q) \in I / \, p = n\} = \{(n,q) \, / q \in \mathbb{N}\}$$

Pour tout $n \geq 1$:

$$s_n = \sum_{(p,q)\in I_n} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+q^2} \geq \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{n^2+t^2} = \frac{\pi}{2n}$$

2.6 Exemple 3

$I = \mathbb{N}^{*2}$.

$$u_{p,q} = \frac{1}{p^3+q^3}$$

$(u_{p,q})$ est-elle sommable ?

2.6.1 Lemme

$\forall x, y \geq 0, (x+y)^3 \leq 4\left(x^3+y^3\right)$.

Démonstration

Directement, en développant $(x+y)^3$, ou en utilisant la convexité de $t \to t^3$ sur $\mathbb{R}+$.

2.6.2 Réponse 1

On va montrer qu'elle est sommable.

$$\forall p \geq 1, \forall q \geq 1, u_{p,q} = \frac{1}{p^3+q^3} \leq \frac{4}{(p+q)^3}$$

On est ramené à l'exemple 1.

Réponse 2

On remplace dans un premier temps I par

$$J = \{(p,q) \, / \, 1 \leq q \leq p\}$$

et on remarque que

$$\forall \, (p,q) \in J, \, 0 \leq u_{p,q} \leq \frac{1}{p^3}$$

Soit $J_p = \{(p,q) \, / \, 1 \leq q \leq p\}$; il est clair que

$$s_p = \sum_{(p,q)\in J_p} u_{p,q} \leq \frac{p}{p^3} = \frac{1}{p^2}$$

Donc $(u_{p,q})_{(p,q)\in J}$ est sommable.

3 Familles sommables de nombres complexes

3.1 Définition

Soit I un ensemble dénombrable ; soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

3.2 Définition de la somme

Cas réel

Pour une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels sommable on pose :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

On rappelle que

$$\forall i \in I,\, 0 \leq u_i^+ \leq |u_i|\,,\, 0 \leq u_i^- \leq |u_i|$$

ce qui assure que $\left(u_i^+\right)_{i\in I}$ et $\left(u_i^-\right)_{i\in I}$ sont sommables.

Cas complexe

Pour une famille $(z_j)_{j\in I}$ de complexes sommable on pose :

$$\sum_{j\in I} z_j = \sum_{j\in I} x_j + i \sum_{j\in I} y_j$$

où x_j est la partie réelle de z_j et y_j la partie imaginaire.

3.3 Cas où $I = \mathbb{N}$

Théorème

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
Dans ce cas, la somme est la même.

3.4 Permutation

Théorème

Soit σ une permutation de I ; soit $v_i = u_{\sigma(i)}$.
Les deux familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont de même nature.
Si elles sont sommables, elles ont même somme.

Démonstration

Toute somme finie

$$\sum_{i\in F} |u_i|$$

est aussi une somme finie de la forme

$$\sum_{i\in F'} |v_i|$$

Elles sont donc de même nature.

Corollaire

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente,
alors, pour toute permutation σ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)}$$

Cela s'applique en particulier aux séries convergentes à termes positifs.

3.5 Linéarité de la somme

Théorème

L'ensemble E des familles $(u_i)_{i\in I}$ sommables est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel
(sous-espace de $\mathbb{C}^I$), et :

$$(u_i)_{i\in I} \to \sum_{i\in I} u_i$$

est une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$.

3.6 Théorème de sommation par paquets

Démonstration hors programme

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable ; alors :
1) Pour tout entier n, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.
2) Notons $s_n = \sum_{i\in I_n} u_i$; la série $\sum s_n$ converge, et :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$$

Remarque

On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille

$$(|u_i|)_{i\in I}$$

4 Le théorème de Fubini

Ici, $I = \mathbb{N}^2$.

4.1 Un exemple

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & ... \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & 0 & ... \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -1 & ... \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

Commenter...

Réponse

$a_{p,q} = 0$ si $p < q$, -1 si $p = q$, et $\frac{1}{2^{p-q}}$ si $p > q$.

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q} = -2, \ \sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q} = 0$$

4.2 Cas des familles de réels positifs

4.2.1 Théorème

Rappelons que $I = \mathbb{N}^2$.
La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in I}$ de réels positifs est sommable si et seulement si :
1) Pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge ; on note alors $s_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}$
2) La série $\sum s_n$ converge.

Si tel est le cas :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$$

Démonstration

C'est un exemple de sommation par paquets ; ici $I_n = ?$

Réponse

$$I_n = \{(m,n)\,/m \in \mathbb{N}\}$$

4.2.2 Exemple 1

Ici, $I = (\mathbb{N}^*)^2$.

$$u_{p,q} = \frac{1}{p^\alpha . q^\beta}$$

à quelle condition cette famille est-elle sommable ?

Réponse

$\alpha > 1$ et $\beta > 1$.

4.2.3 Exemple 2

Ici, $I = (\mathbb{N}^*)^2$.

$$u_{p,q} = \frac{1}{p.q.\,(p+q)}$$

On introduit, si elle existe :

$$s_p = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{p.q.\,(p+q)}$$

Après calcul :

$$s_p = \frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}$$

Conclusion :

$$s_p \sim \frac{\ln p}{p^2}$$

donc $s_p = o\left(\frac{1}{p^\alpha}\right)$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, donc la famille est sommable.

Le même, autre méthode

On utilise

$$I_n = \left\{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \,/\, p+q = n\right\}$$

On trouve

$$s_n = \frac{2}{n^2} . \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Encore une autre

Utiliser

$$\forall p,q \geq 1, \frac{1}{p+q} \leq \frac{1}{2\sqrt{p}\sqrt{q}}$$

4.3 Cas des familles de nombres complexes

Si la famille $(a_{m,n})$ de nombres complexes est sommable, alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}$$

Remarque

Pour vérifier l'hypothèse de sommabilité :
on peut appliquer le théorème de Fubini à la famille

$$(|a_i|)_{i \in I}$$

4.4 Exercice

Calculer

$$\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{q=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{q^p}$$

Réponse

Soit

$$s_p=\sum_{q=2}^{\infty}\frac{1}{q^p}$$

s_p existe (série de Riemann) ; il faudrait montrer que $\sum s_p$ converge...

Ce qui découle de

$$0\leq s_p\leq\frac{1}{2^p}+\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p}=\frac{1}{2^p}+\frac{1}{(p-1)\,2^{p-1}}$$

Mais il y a plus simple :

Soit

$$t_q=\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{q^p}$$

t_q se calcule :

$$t_q=\frac{1}{q\,(q-1)}$$

Conclusion :

$$\sum_{p=2}^{\infty}\sum_{q=2}^{\infty}\frac{(-1)^p}{q^p}=\frac{1}{2}$$

5 Le produit de Cauchy

5.1 Introduction

Soit $E=\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; on définit sur E une loi de composition interne ainsi :

pour $u,v\in E$, on définit $w=u*v$ par :

$$\forall n\geq 0, w_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.v_{n-k}$$

On prolonge ainsi la multiplication connue dans $\mathbb{C}[X]$.

On peut montrer que $*$ est commutative, associative, et possède un élément neutre.

On peut chercher les inversibles...

Par exemple, soit u définie par $u_0=1, u_1=-1$, et $u_n=0$ pour $n\geq 2$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, u est appelée ?

$$u=1-X$$

u n'est pas inversible dans $\mathbb{C}[X]$, mais l'est dans E.

5.2 Théorème

Soit (u_n), $(v_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$; on suppose $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes.

Soit

$$w_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.v_{n-k}$$

Alors $\sum w_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{\infty}w_n=\sum_{n=0}^{\infty}u_n.\sum_{n=0}^{\infty}v_n$$

Démonstration

$I = \mathbb{N}^2$; $a_{p,q} = u_p.v_q$.

On déduit du théorème de Fubini que $(a_{p,q})$ est sommable et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n . \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

Ensuite, on utilise le théorème de sommation par paquets avec

$$J_n = \{(k, n-k) \,/\, 0 \leq k \leq n\}$$

5.3 Application à exponentielle

Théorème

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; alors :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$$

Démonstration

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

$$e^{z+z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+z')^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k . z'^{n-k}$$

Donc

$$e^{z+z'} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} . \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$$

On peut donc appliquer le théorème avec $u_k = \frac{z^k}{k!}$ et $v_k = \frac{z'^k}{k!}$.

5.4 Un contre-exemple

On définit (u_n) et (v_n) par

$$u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

si $n \geq 1$, et $u_0 = v_0 = 0$.

Les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont semi-convergentes d'après le TSA.

Mais $\sum w_n$ diverge grossièrement, en effet :

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

Donc

$$|w_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \frac{n-1}{n}$$

5.5 Le théorème de Mertens (exercice)

Soit (u_n), $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose $\sum u_n$ absolument convergente et $\sum v_n$ convergente. On notera U et V leurs sommes.

Soit

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k . v_{n-k}$$

Alors $\sum w_n$ est convergente, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n . \sum_{n=0}^{\infty} v_n = U.V$$

5.5.1 Lemme

Soit (u_n), $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose $\sum u_n$ absolument convergente, de somme S et (v_n) convergente, de limite L. Soit $w = u * v$:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k}$$

Alors (w_n) converge vers $L.S$.

Démonstration

On se ramène très facilement au cas où $L = 0$.

(v_n) est convergente, donc bornée. On note

$$M = \|(v_n)\|_\infty$$

Ensuite on fixe $\varepsilon > 0$, et n_0 tel que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2.M}$$

On obtient

$$\forall n \geq n_0,\ |w_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{n_0} u_k.v_{n-k}$$

Conclusion ?

Variante

On peut écrire

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.v_{n-k}$$

avec la convention $v_n = 0$ pour $n < 0$.

Série qui converge normalement car

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ |u_k.v_{n-k}| \leq M.\,|u_k|$$

On termine à l'aide du théorème de la double limite.

5.5.2 Démonstration du théorème de Mertens

On notera

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

avec la convention $V_n = 0$ si $n < 0$.

On vérifie facilement que pour $N \geq 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} u_k.v_{n-k} = \sum_{k=0}^{N} u_k \sum_{q=0}^{N-k} v_q$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{N} w_n = \sum_{k=0}^{N} u_k.V_{N-k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.V_{N-k}$$

Le lemme permet de conclure.