Suites d'intégrales

1 Wallis : pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n$. Existence, monotonie, limite de (w_n) ? Montrer que $w_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n$, puis : $\forall\, n \geq 2,\ \ n\,w_n = (n-1)w_{n-2}$. (IPP). En déduire : $\forall\, n \geq 1,\ n\,w_n w_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$ (*). Exprimer w_n à l'aide de factorielles en distinguant les cas n pair et impair. Montrer que $w_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ en utilisant (*) et la monotonie de (w_n).

2a Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$, et $P_n = \dfrac{1}{n!}X^n(a-bX)^n$. Calculer $P_n^{(k)}(0)$ en utilisant Taylor et binôme, et vérifier que c'est un entier pour tout k. Calculer $P_n^{(k)}(\dfrac{a}{b})$.

b Soit $r = \dfrac{a}{b}$, et $I_n = \int_0^r P_n(x)e^x dx$. Montrer que (I_n) tend vers 0. Montrer que e^r est irrationnel.

c On suppose que $\pi = \dfrac{a}{b}$; soit $J_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)dt$; montrer que (J_n) est une suite d'entiers strictement positifs de limite nulle. Conclure.

3 Déterminer $\lim\limits_n \int_0^n \dfrac{x+1}{x^n e^x + x^2 + x + 1}dx$.

4 Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n$. Existence ? Monotonie de (I_n) ? Calculer $I_0,\ I_1,\ I_2$. Montrer que (I_n) converge. Calculer $I_n + I_{n+2}$ et en déduire $\lim\limits_n I_n$, puis un équivalent de (I_n).

5 Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{1+\tan^n x}$. Calculer $\int_0^{\pi/2} f_n$ avec peu de calculs.

6 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ $C°$. Soit $I_n = \int_0^1 \dfrac{f(t)}{1+nt}dt$. Chercher la limite, puis un équivalent de (I_n).

7 Soit $I_n = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t+t^2+\ldots+t^n}$; existence de I_n ? Montrer que la suite (I_n) converge, puis déterminer sa limite.

8 Soit $n \geq 0$, $f_n(t) = \dfrac{(1-t)^n}{1+t^2}$, $I_n = \int_0^1 f_n$. Montrer que : $\exists\ \ a_n,\ b_n,\ c_n \in \mathbb{Q},\ \ I_n = a_n + \pi b_n + c_n \ln 2$.

9 Soit f $C°$ bornée sur $\mathbb{R}$. Etudier $I_n = \int_0^\infty \dfrac{nf(t)}{1+n^2t^2}dt$.

10 Soit f $C°$ sur $[0,1]$; étudier la CV des suites $I_n = \int_0^1 f(t^n)dt$, $J_n = \int_0^1 f(t)\ln(1+t^n)dt$, $K_n = nJ_n$.

11 Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$ à l'aide de $I_n = \int_0^n (1-\dfrac{x}{n})^n \ln(x)dx$.

12 Soit $a_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{1+t^n}dt$. **a** existence, limite de (a_n). **b** Trouver un équivalent de (a_n). (CHV).

c Trouver le deuxième terme du DA.

13 Calculer $I_n = \int_0^1 t^n \ln(t)dt$. Soit $J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ln t$. Limite, équivalent de (J_n) ?

14 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \left]0,\pi\right[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$; trouver la limite et un équivalent de (u_n).
On note $f_1 = \sin$, $f_{n+1} = \sin \circ f_n$, et $I_n = \int_0^1 f_n$; trouver la limite et un équivalent de (I_n) .

15 Soit $a_n = \int_0^1 (1-t+t^2)^n dt$. Montrer que (a_n) tend vers 0. Montrer que $\sum(-1)^n a_n$ converge, et calculer sa somme. ($\frac{4}{\sqrt{7}}\arctan\frac{1}{\sqrt{7}}$). Montrer que $(2n+1)a_n = 1+\frac{3}{2}n\,a_{n-1}$.
Montrer que $a_n \sim \frac{2}{n}$. (CHV $u = nt$ sur $[0, \frac{1}{2}]$).

16 Soit $h_n(x) = (1+x^3)^{-n}$, $I_n = \int_0^\infty h_n$. Existence ? Lim I_n ? Calculer I_1 ($\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$). Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n . En déduire la nature de $\sum I_n$, puis un équivalent de I_n de la forme $Cn^{-\alpha}$, C inconnu. Comment trouver C ?